Chapitre M1 – Cinématique du point

La mécanique est la branche de la physique qui s'intéresse à l'étude des mouvements. Newton énonce en 1687 ses trois lois fondamentales de la mécanique et pose les fondements théoriques de ce que l'on nomme la mécanique classique ou mécanique newtonienne. Cette théorie permet de décrire avec une très grande précision le mouvement des objets pas trop petits, pas trop massifs et qui ne se déplacent pas trop rapidement.

I) Description du mouvement

1) Référentiel

Le **mouvement** est **relatif**. Lors d'un voyage en train, je suis :

- immobile, d'après la personne assise à côté de moi ;
- en mouvement, d'après une personne sur Terre qui regarde passer le train.

Les notions de position, vitesse ou accélération sont donc relatives : elles dépendent de l'observateur qui étudie le mouvement.

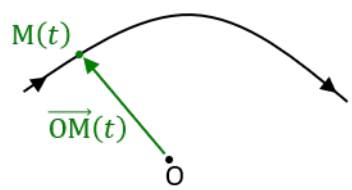
Définition :

On appelle **référentiel** un observateur muni d'un repère d'espace et d'une horloge.

En mécanique classique, l'**espace** et le **temps** sont **absolus** : une durée τ et une longueur L sont les mêmes pour tous les référentiels.

2) Vecteur position

Soit un repère de centre O et un point M(t). Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$ s'appelle le **vecteur position**. Son évolution temporelle est donnée par les **équations horaires du mouvement**.

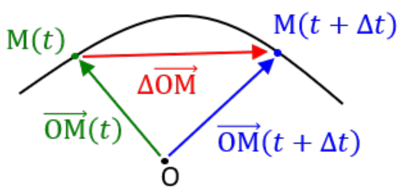


Exemple : $x(t)$, $y(t)$

La courbe décrite par le point M au cours du mouvement est la **trajectoire** du point M.

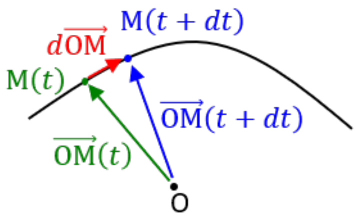
3) Vecteur déplacement élémentaire

On appelle **vecteur déplacement** entre deux instants t et $t + \Delta t$, la variation de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ entre ces deux instants. Il est noté $\Delta\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.



$$\Delta\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t + \Delta t) - \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$$

Lorsque la durée $\Delta t \to 0$, on la note dt et on parle de durée infinitésimale. On appelle **vecteur déplacement élémentaire** la variation de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ entre t et $t+dt$. Il est noté $d\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

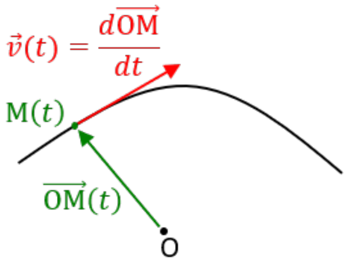


$$\boxed{d\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t + dt) - \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)}$$

Ce vecteur est tangent à la trajectoire.

Vocabulaire : « $d\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ » se lit la **différentielle** de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

4) Vecteur vitesse



Les vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ est défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

Il s'agit donc de la dérivée du vecteur position par rapport au temps.

Par définition, $\overrightarrow{v} \propto +d\overrightarrow{OM}$ puisque $dt > 0$.

Propriété :

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire, dans le sens du mouvement.

5) Vecteur accélération

On note $d\overrightarrow{v}$ la variation infinitésimale du vecteur vitesse entre les instants t et $t + dt$.

$$d\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(t + dt) - \overrightarrow{v}(t)$$

Les vecteur accélération $\overrightarrow{a}$ est défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}}$$

Il s'agit donc de la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps.

Propriétés :

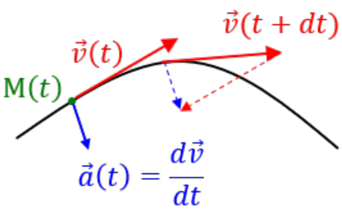
On peut décomposer $\overrightarrow{a}$ en une somme d'un vecteur tangent à la trajectoire $\overrightarrow{a}_{\parallel}$ et d'un vecteur orthogonal à la trajectoire $\overrightarrow{a}_{\perp}$

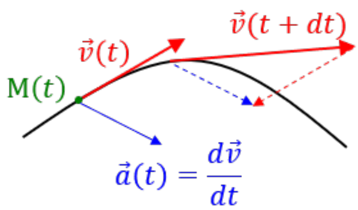
$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_{\parallel} + \overrightarrow{a}_{\perp}$$

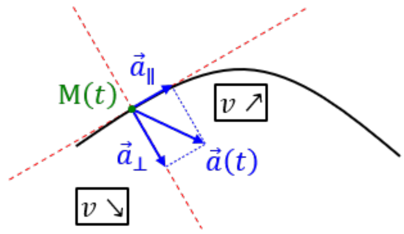
Le sens le $\overrightarrow{a}_{\perp}$ indique dans quel sens la trajectoire va se courber. Ainsi, $\overrightarrow{a}_{\perp} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{v}$ ne change pas de **direction**. On parle alors de trajectoire **rectiligne**.

Le sens le $\overrightarrow{a}_{\parallel}$ indique si le point M parcourt la trajectoire de plus en plus rapidement (si $\overrightarrow{a}_{\parallel} \propto +d\overrightarrow{OM}$) ou de plus en plus lentement (si $\overrightarrow{a}_{\parallel} \propto -d\overrightarrow{OM}$). Ainsi, $\overrightarrow{a}_{\parallel} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{v}$ ne change pas de **norme**. On parle alors de trajectoire **uniforme**.

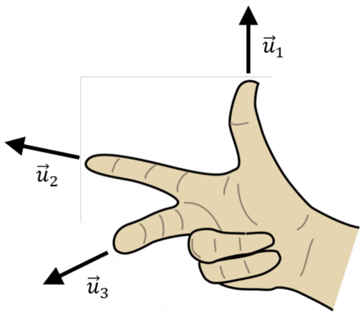
Un mouvement **rectiligne uniforme** et donc un mouvement à accélération nulle.







6) Base orthonormée directe



Tous les repères utilisés en physique sont des bases **orthonormées directes** (BOND). Cela signifie que les trois vecteurs de base sont :

- orthogonaux entre eux : $\overrightarrow{u}_i \cdot \overrightarrow{u}_j = 0$ si $i \neq j$;
- unitaires : $\|\overrightarrow{u}_i\|$ pour $i = 1, 2, 3$;
- orienté dans le sens de la main droite.

Dans une BOND, un vecteur $\overrightarrow{v}$ quelconque s'écrit :

$$\overrightarrow{v} = v_1 \overrightarrow{u}_1 + v_2 \overrightarrow{u}_2 + v_3 \overrightarrow{u}_3 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

La norme de ce vecteur vaut :

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

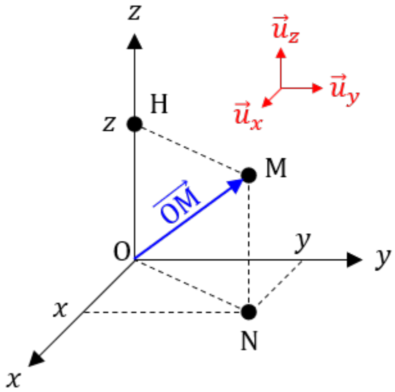
II) Coordonnées cartésiennes

1) Vecteur position

Soit une BOND $(\mathrm{O}, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ fixe. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Vecteur position :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



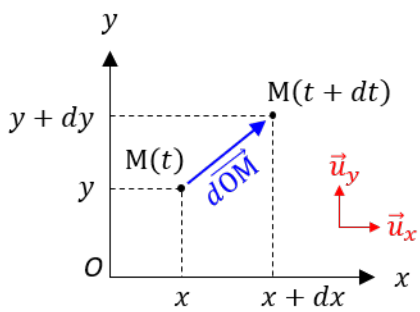
2) Vecteur déplacement élémentaire

Entre t et $t + dt$, les coordonnées du point M varient légèrement :

$$\mathrm{M}(x, y, z) \to \mathrm{M}(x + dx, y + dy, z + dz)$$

Déterminons l'expression du vecteur déplacement élémentaire.

$$\boxed{d\overrightarrow{\mathrm{OM}} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}}$$



3) Vecteurs vitesse et accélération

Par définition,

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt} = \dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y + \dot{z}\,\vec{u}_z = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}}$$

Retrouvons ce résultat par le calcul :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z\right) = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + x\cancel{\frac{d\vec{u}_x}{dt}} + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + y\cancel{\frac{d\vec{u}_y}{dt}} + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z + z\cancel{\frac{d\vec{u}_z}{dt}}$$

Les vecteurs $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont fixes, il ne dépendent pas du temps. Leur dérivée est nulle. On retrouve bien :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt} = \dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y + \dot{z}\,\vec{u}_z = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

Par définition,

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\,\vec{u}_x + \ddot{y}\,\vec{u}_y + \ddot{z}\,\vec{u}_z = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}}$$

4) Application : mouvement à vecteur accélération constant

Soit un point M qui subit une accélération constante :

$$\overrightarrow{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad \text{avec :} \quad a \in \mathbb{R}$$

À l'instant initial, il se trouve dans l'état :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t=0) = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}(t=0) = \overrightarrow{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0\,\cos(\theta) \\ 0 \\ v_0\,\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Méthode n°1 : équation vectorielle

On primitive pour obtenir le vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{a} \times t + \overrightarrow{v}_0$$

On primitive pour obtenir le vecteur position :

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = \frac{\overrightarrow{a}}{2} \times t^2 + \overrightarrow{v}_0 \times t}$$

Il s'agit d'un polynôme d'ordre 2, la trajectoire est donc une parabole.

Les équations horaires sont :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t\,\cos(\theta) & \leftarrow\ /\overrightarrow{u}_x \\ y(t) = 0 & \leftarrow\ /\overrightarrow{u}_y \\ z(t) = \dfrac{at^2}{2} + v_0 t\,\sin(\theta) & \leftarrow\ /\overrightarrow{u}_z \end{cases}$$

Méthode n°2 : projection et équations scalaires

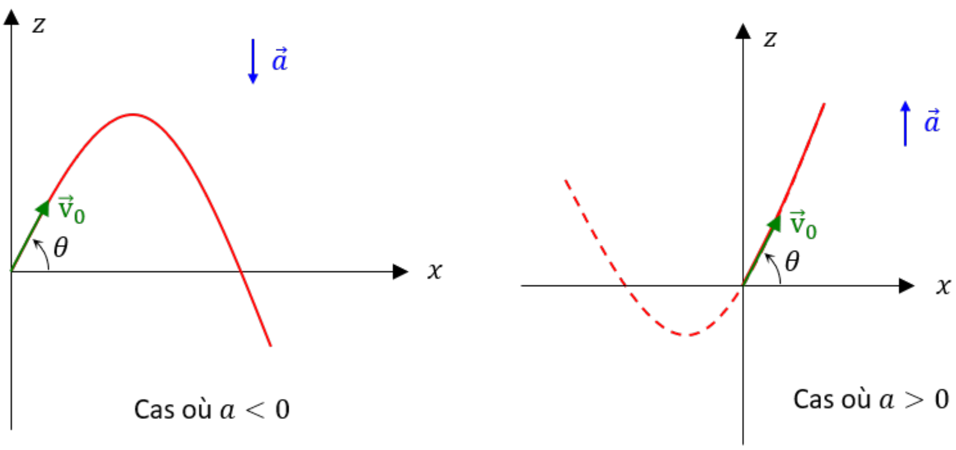
On projette le vecteur accélération et on intègre deux fois les trois projections.

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = v_0\,\cos(\theta) \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = at + v_0\,\sin(\theta) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = v_0 t\,\cos(\theta) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \dfrac{at^2}{2} + v_0 t\,\sin(\theta) \end{cases}$$

On obtient alors l'équation cartésienne de la trajectoire :

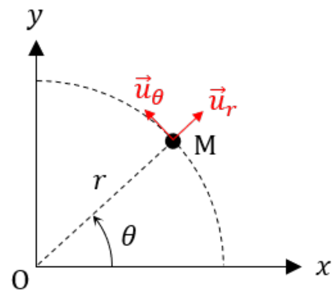
$$t = \frac{x}{v_0\,\cos(\theta)} \quad \text{avec :} \quad \boxed{z = \frac{a}{2}\left(\frac{x}{v_0\,\cos(\theta)}\right)^2 + v_0\,\tan(\theta) \times x}$$

Le sens de la parabole dépend du signe devant le x^2.



III) Coordonnées polaires

1) Vecteur position



Soit le plan (O, x, y) et un point M de ce plan. Soit $r = \mathrm{OM} \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ l'angle orienté entre l'axe $(\mathrm{O}x)$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

Définit le **vecteur radial** : $\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{OM}}$

Ainsi que le **vecteur orthoradial** $\overrightarrow{u_\theta}$: vecteur unitaire $\perp$ à $\overrightarrow{u_r}$ et dans le sens de l'orientation de θ.

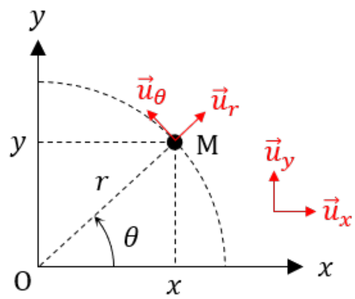
On définit alors la base polaire $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$.

Vecteur position :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u_r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Remarque : le vecteur position dépend bien de θ car l'orientation de $\overrightarrow{u_r}$ en dépend.

2) Lien avec les coordonnées cartésiennes



Coordonnées polaires $\rightarrow$ cartésiennes :

$$\boxed{x = r\,\cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = r\,\sin(\theta)}$$

Coordonnées cartésiennes $\rightarrow$ polaires :

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}}$$

Lien entre les vecteurs de base :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_y} & \qquad \overrightarrow{u_x} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_r} - \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta} \\ \overrightarrow{u_\theta} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_y} - \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_x} & \qquad \overrightarrow{u_y} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_r} \end{array}}$$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ dépendent de θ, se ne sont pas des vecteurs constants. Calculons leur dérivée temporelle à l'aide des expressions ci-dessus.

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dfrac{d}{dt}\Big(\cos(\theta)\,\vec{u}_x + \sin(\theta)\,\vec{u}_y\Big) = \dfrac{d\theta}{dt} \times \dfrac{d}{d\theta}\Big(\cos(\theta)\,\vec{u}_x + \sin(\theta)\,\vec{u}_y\Big) = \dfrac{d\theta}{dt} \times \underbrace{\Big(-\sin(\theta)\,\vec{u}_x + \cos(\theta)\,\vec{u}_y\Big)}_{=\vec{u}_\theta} \\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \dfrac{d}{dt}\Big(\cos(\theta)\,\vec{u}_y - \sin(\theta)\,\vec{u}_x\Big) = \dfrac{d\theta}{dt} \times \dfrac{d}{d\theta}\Big(\cos(\theta)\,\vec{u}_y - \sin(\theta)\,\vec{u}_x\Big) = \dfrac{d\theta}{dt} \times \underbrace{\Big(-\sin(\theta)\,\vec{u}_y - \cos(\theta)\,\vec{u}_x\Big)}_{=-\vec{u}_r} \end{cases}$$

Bilan :

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r}$$

La grandeur $\dot{\theta}$ correspond à une **vitesse angulaire** et se note ω.

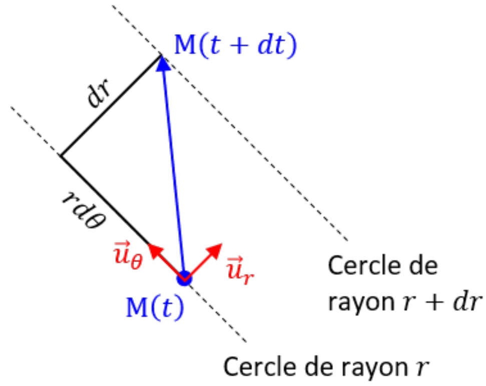
3) Vecteur déplacement élémentaire

Entre t et $t + dt$, les coordonnées du point M varient légèrement :

$$\mathrm{M}(r, \theta) \to \mathrm{M}(r + dr, \theta + d\theta)$$

Déterminons l'expression du vecteur déplacement élémentaire.

$$\boxed{d\overrightarrow{\mathrm{OM}} = dr\,\vec{u}_r + r d\theta\,\vec{u}_\theta = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \end{pmatrix}}$$



4) Vecteurs vitesse et accélération

Par définition,

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}}$$

Retrouvons ce résultat par le calcul :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(r\,\vec{u}_r\Big) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

Par définition,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\dot{r}}{dt}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right] + \left[\frac{dr}{dt}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right] = \Big[\ddot{r}\,\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\Big] + \Big[\dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r\Big]$$

On en déduit :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \Big(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\Big)\vec{u}_r + \Big(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\Big)\vec{u}_r = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix}}$$

5) Application : mouvement circulaire

On se place dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon R. Dans ce cas :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = R\,\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = R\omega\,\vec{u}_\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = R\dot{\omega}\,\vec{u}_\theta - R\omega^2\,\vec{u}_r$$

<u>Remarque</u> : on peut également poser $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$ dans les formule précédentes.

La norme du vecteur vitesse vaut : $v = R\omega$. On peut alors ré-écrire l'accélération :

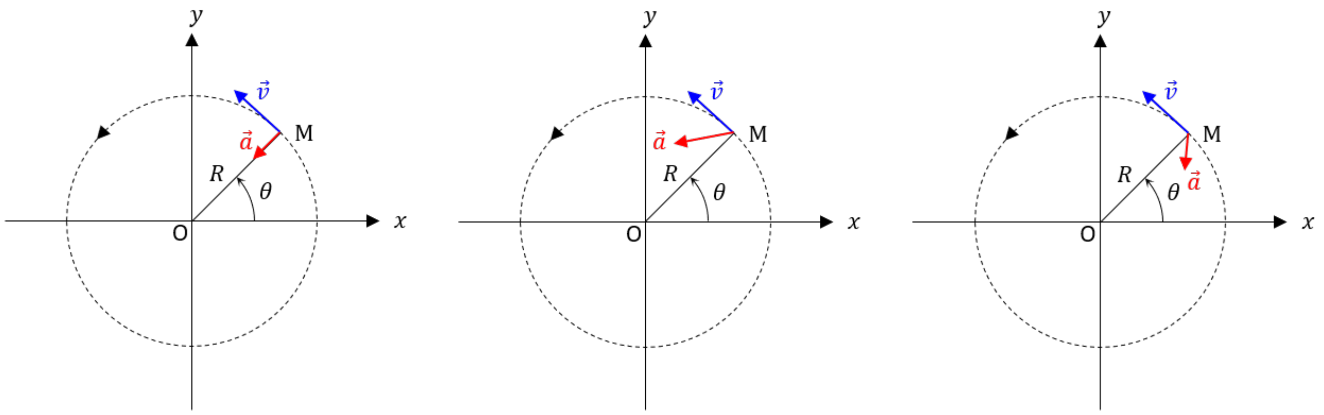
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{u}_r = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp \quad \text{avec :} \quad \vec{a}_\parallel = \frac{dv}{dt}\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a}_\perp = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r$$

On retrouve une remarque faite au I.5. Le vecteur accélération possède 2 composantes :

- une orthogonal à la trajectoire ($\vec{a}_\perp$) qui indique dans quel sens se courbe la trajectoire ;
- une tangente à la trajectoire ($\vec{a}_\parallel$) dont le sens ($\pm\vec{u}_\theta$) dépend de si v augmente (ie. $\dfrac{dv}{dt} > 0$) ou diminue (ie. $\dfrac{dv}{dt} < 0$).

Dans le cas d'un mouvement **uniforme** (ie. $v = cte$), la vitesse angulaire est constante ($\omega = cte$) et l'accélération est purement radiale.

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = R\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \underbrace{R\omega}_{=\,cte}\,\vec{u}_\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r$$



Cas uniforme : $v = cte$ | Cas où $\dfrac{dv}{dt} > 0$ | Cas où $\dfrac{dv}{dt} < 0$

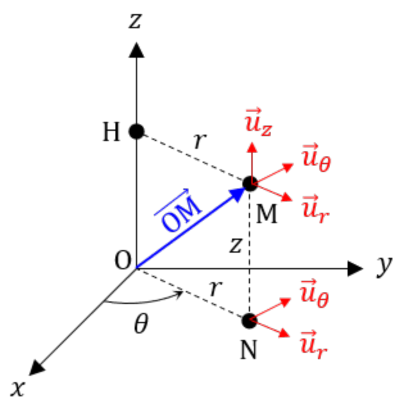
IV) Coordonnées cylindriques

1) Vecteur position

Soit un point M de l'espace et N sont projeté orthogonal dans le plan (O, x, y).
On repère le point N par ses coordonnées polaires.

On définit alors la base cylindriques $(\mathrm{O}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Vecteur position :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{ON}} + \overrightarrow{\mathrm{NM}} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}}$$



<u>Attention</u> : dans la base cylindrique, r représente la distance entre M et l'axe (O, z), ie. $r = \mathrm{HM} = \mathrm{ON}$, mais pas la distance OM !

2) Autres vecteurs

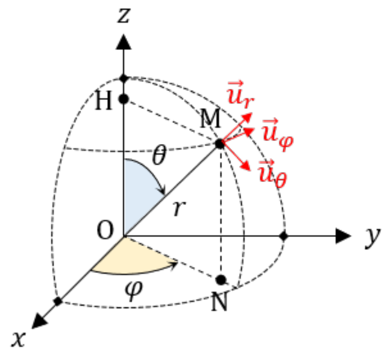
De ce qui précède, on en déduit les vecteurs déplacement élémentaire, vitesse et accélération.

$$d\overrightarrow{\mathrm{OM}} = dr\,\vec{u}_r + rd\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{u}_z = \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ dz \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_r + \ddot{z}\,\vec{u}_z = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

V) Coordonnées sphériques

1) Vecteur position



Soit l'espace cartésien (O, x, y, z) et un point M de l'espace. On note N le projeté orthogonal de M dans le plan (O, x, y) et H le projeté orthogonal de M sur la l'axe (O, z).On définit les coordonnées sphériques :

- $r \in \mathbb{R}^+$ la distance OM ;
- $\theta \in [0, \pi]$ l'angle orienté entre l'axe (Oz) et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$;
- $\varphi \in [0, 2\pi[$ l'angle orienté entre l'axe (Ox) et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$.

Les vecteurs de base associés sont :

- le vecteur radial $\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{OM}}$;
- le vecteur « Nord → Sud » $\overrightarrow{u_\theta}$ tangent à la sphère de rayon r et dirigé vers le Sud ;
- le vecteur « Ouest → Est » $\overrightarrow{u_\varphi}$ tangent à la sphère de rayon r et dirigé vers l'Est.

On définit alors la base sphérique $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$.

Vecteur position :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u_r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

2) Vecteur déplacement élémentaire

Entre t et $t + dt$, les coordonnées du point M varient légèrement :

$$\mathrm{M}(r, \theta, \varphi) \to \mathrm{M}(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$$

Décomposons se déplacement selon les trois axes.

- Selon $\overrightarrow{u_r}$: déplacement rectiligne de longueur dr.
- Selon $\overrightarrow{u_\theta}$: déplacement circulaire de rayon r et d'angle $d\theta$, donc de longueur $rd\theta$.
- Selon $\overrightarrow{u_\varphi}$: déplacement circulaire de rayon $\mathrm{HM} = r\,\sin(\theta)$ et d'angle $d\varphi$, donc de longueur $r\,\sin(\theta)\,d\varphi$.

On en déduit l'expression du vecteur déplacement élémentaire.

$$\boxed{d\overrightarrow{\mathrm{OM}} = dr\,\overrightarrow{u_r} + rd\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\,\sin(\theta)\,d\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi} = \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ r\,\sin(\theta)\,d\varphi \end{pmatrix}}$$